実践例<5> 関数の基本概念である変化と対応をどう関連づけて指導するか

中頸城郡頸城村立大滝中学校教諭　白　川　鷹　司

I　研究のねらい

関数指導のポイントは，変化と対応であるといわれている。しかし，従来の指導はともすると，グラフを主体とする変化に重点がおかれ，対応という面がおろそかにされているという傾向があった。関数を，数量面のみを対象とするならば，従来の指導でもそれほどさしつかえないであろうが現代化の立場から，もっと広範囲の分野を対象とし，その為にも，集合の考えをもとに関数の新しい定義づけをし，変数をみなおし，変域に対する関心を高め，変化と対応に対する指導をより重視して指導しようということである。我々も，このような流れをふまえて指導体系を作成し，実践しようと考えた。

ところで，このような観点に立って具体的な指導体系やそれに基づく指導計画を作成する際，いろいろな問題点や疑問点がたくさんでてきた。その一つに，関数を対応で定義するとどうしても対応が前面にでて変化がぼやけてしまう。これをどう関連づけて指導していくかという大きな問題点がある。

実際，関数を集合間の対応で定義するとなると，集合の静的，存在的な特性からは関数の特性である変化の特性はあらわれにくい。我々は，この変化と対応をどう関連づけて指導し変数の概念を高めていくかという問題点に対して，関数の基本的な見方，考え方をねらいとする中学一年生の指導において，次のような考えで指導体系を作成し，それに基づいて実践し検討しようと考えた。

才1節（関数の意味）のところでは，2つの集合間の要素の対応を主体に，変化と一応切り離して考える。従って，数量関係に限らず，広く日常的な事柄や，図形に関するものなども取り入れて生徒の興味や関心を高めるとともに関数を広い意味で考えられる素地を養っていく。この節での変数は，1つの集合のどの元にもなりうる記号の意味で扱い，まだ変化ということを明確に意識して用いない。2つの集合間の対応を考えその対応が一意対応であるとき関数であることをおさえる。

才2節（関数の表わし方）のところでは，才1節の広義の写像という考えから，やや狭い相伴って変わる数量関係について考えていく。そのとき，その対応にはどんなきまりがあるかを明らかにし，それを式や表やグラフで表わすことに重点をおいて扱っていく。即ち，変わる数という順序をもととした変数の考えで，変化する2量を対応という面から考えさせていく。

才3節（座標と関数のグラフ）では，座標を導入し，変数x，yの変域を負の領域まで拡張して変数xを変えるとそれに伴ってyがどのように変わるか。xの変化に対するyの変化を表やグラフに表わして考えさせていく。即ち，まとめとして，対応している2量を変化という面から考察させていく。

このような指導段階を経て，変化と対応を関連づけ，関数的な見方，考え方を伸ばそうと考えた。

Ⅱ　研究の内容 ―― 実践記録

この研究の大筋の考えは前記のごとくである。それでは，変化と対応の関連を具体的にどのような内容で，どのような過程を経て指導したかを次に記録する。なお，詳細に全部を記録することができないのでポイントとなるところを記録する。

1.　関数の意味 ―― 実践例4参照

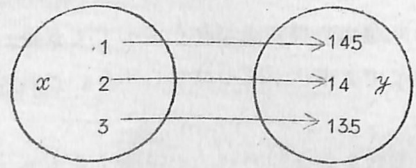
2.　関数の表わし方

§1 表とグラフ

（例題）　長さ15cmのロウソクが1分間に0.5cmの割合で燃えるとき，燃える時間（x分）とロウソクの残りの長さ（$y$cm）の関係について考えてみよう。

① この問題で，伴って変わる2量はどんな集合を作るか。それをベン図で表わし，その要素間の対応を線で結んでみよ。

② 変数xから変数yへの対応は関数といえるか。



。一意対応であるかどうかを確認する。

③ 燃える時間（x分）は，どんな範囲の数か。

。条件的表わし方 $\{x \mid 0 \leqq x \leqq 30\}$ で表わす。

④ 燃える時間（x分）に対するローソクの残りの長さ（$y$cm）の変り方を，わかりやすく表わすにはどんな方法があるか。

。ベン図よりも表やグラフの方が便利である。

。表の作り方

x分	0 …… 1 …… 2 …… 3 …… 4 …… 5 …… 29 …… 30
$y$cm	15 …… 145 …… 14 …… 135 …… 13 …… 125 …… 05 …… 0

変数xが小数（分数）にもなり得ることをはっきりさせるため，初期の段階では，上の表のように点線を入れて表わす。

。グラフの書き方

㋑変数xの値をきめると，それに対応する変数yの値が1つきまる。このことから，次のような数の組ができる。

（0，15）　（1，14.5）　（2，14）　（3，13.5）……………（30，0）

このような数の組がいくつできるかは，変数xの変域によって異なる。

㋺変数x，yの変域を考え，1点0で直交する2本の半直線をたて，その線上に目盛りをとる。

㋩1組の対になっている数の組は，それぞれ1点を決定する。

㋥これらの点の集合を関数のグラフという。

(問題)　電報の字数と料金等の問題について，上の例題と同じような展開をする。

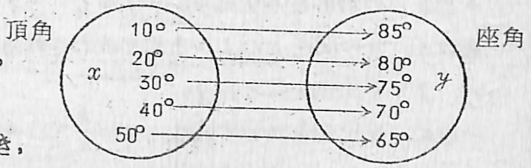
§2 式

(例題)　等辺が5cmである二等辺三角形の頂角と底角の関係について考えてみよう。

等辺が5cmと決めただけでは，いろいろな二等辺三角形ができる。このことから，頂角と底角が伴って変わっていることに着目させて，次のように考えさせていく。

① 頂角が10°，20°，30°，40°のとき，1つの底角は何度かを計算せよ。

② 頂角の大きさをx°，1つの底角の大きさをy°として，xからyへの要素の対応を5組だけ，ベン図で示せ。



③ 変数xから変数yへの対応は関数といえるか。

④ 変数x，yの変域をいえ。

⑤ xの値からそれに対応するyの値を求めるとき，どのようにしたか。言葉でいえ。また，このことから，yをxの式で表わせ。

。xの値に対応するyの値は「180°からxを引いて，それを2で割る」ということによって，求めることができる。これをxからyへの対応の規則という。

また，上のことから　$y=\dfrac{180°-x}{2}$　とかける。

これを関数を表わす式という。

(問題1)　次の変数xから変数yへの対応で，対応の規則を考え，式でかけるものは式でかけ。

① 底辺が6cmである三角形の高さ$x$cmとその面積$y$cm²

② ある場所における1日の時刻x時と，そのときの気温y°

③ 400円持って買物に行ったときの，使ったお金x円と残ったお金y円

(問題2)　次のxからyへの対応の規則をみつけ，ことばでいえ。また，式で表わせ。(問題省略)

(問題3)　次のxの変域と式から，対応表を作り，グラフを書け。

① $y=2x$　ただし　$X=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

② $y=3x+5$　　$X=\{x \mid 0\leqq x\leqq 5\}$

(問題4)　次の表は，100cc の水をビーカーに入れ，アルコールランプで熱し，しばらくしてからよくかきまぜながら，水温がどのように上昇するかを途中まで記録したものである。

時刻 (x分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…………
水温 (y℃)	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	…………

① この実験では，水温y°は何がきまればきまるか。

② そのとき，変数xからyへの対応にはどんなきまりがあるか。言葉でいえ。また式でも表わせ。

(変化の見方)　測りはじめたときは20°で，1分経過するごとに水温は3°ずつ上昇する。

(対応を考える)　17分後の水温は何度か。順に数えないで求める方法を考えよ。

1分間に3°ずつ上昇するのだから　17分間に　3°×17＝51°上昇する。20°＋51°＝71°になる。

x分後には$3°\times x=(3x)°$上昇するから　$(20+3x)°$になる。式は，$y=20+3x$

③ 21分後，4分15秒後の水温は何度か。

④　水温の変わり方をわかりやすく表わすにはどうすればよいか。

§3　いろいろな関数

（例題）　面積が２４cm^2の長方形のたての長さx cmと横の長さy cmについて考えてみよう。

①　変数xの変域をいえ。また，変数yの変域をいえ。

②　xに対応するyの値を求めて，表で表わせ。

③　xからyへの対応の規則を考え，式で表わせ。

xからyへの対応という見方から　$y=\dfrac{24}{x}$　という式ができる。

xとyとの対応という見方からすると　$xy=24$（積一定）という式ができる。

変数x，yの間に上のような式で表わされる関係が成り立っているとき，この関係を反比例といい，２４を比例定数という。

一般に，反比例を表わす式は　$y=\dfrac{k}{x}$又は$xy=k$（kは比例定数）で表わされる。

④　xに対応するyの値を求めて，グラフをかけ。

（問題１）　次の変数x，yの対応の規則を考え，式でかけ。また表，グラフで表わせ。

①　２５mのひもを兄弟２人で分けるときの兄の取り分x mと弟の取り分y m

②　現在１２cc入っているコップに水を入れるとき，入れる水の量x ccと全体の水の量y cc

③　１本５円の鉛筆の本数x本とその値段y円

④　正方形の一辺の長さx cmとその面積y cm^2

⑤　定形外郵便物の重さx gとその料金y円

⑥　１辺１２cmの正方形の４すみから，正方形を４つ切りとって，ふたのない箱を作るとき，その切りとった正方形の１辺の長さx cmとその箱の体積y cm^3

（問題２）　次の等式は，変数x，yの間の対応のきまりを表わしている。比例の関係，反比例の関係，どちらでもない関係に分類せよ。

①　$y=2x$　　②　$y=2x-1$　　③　$y=\dfrac{x}{2}$　　④　$xy=2$　　⑤　$x+y=10$

⑥　$y=\dfrac{4}{3x}$　　⑦　$2x-y=7$

3.　座標と関数のグラフ

§1　点の座標　　　§2　関数のグラフ　　　（省略）

§3　関数の値の変化

（例題）　２つの集合Ｘ，Ｙの任意の要素x，yの間に，それぞれ，次のような式で表わされる関係がある。このとき，xの値を順に変えるとyがどのように変わるかを調べてみよう。

㋑$y=2x$　　㋺$y=-x+3$　　㋩$xy=12$　　㋥$y=x^2$

但し，xの変域はいずれも　$\{x \mid -5 \leqq x \leqq 5\}$　とする。

①　変数xに対するyの変化をわかりやすく表わすには，どうすればよいか。

②　表から，xが１ずつ増すとyはいくつずつ増すか。または減るか。

㋑㋺とも，yの増し方（減り方）は一定である。

㈠㈡とも，yの増し方（減り方）が一定でなく，しかもその場所によって異なる。

③　グラフから，xが１ずつ増すとyはいくつずつ増すか，または減るか考えよ。

（問題１）　変数x，yの間に$y=\frac{1}{2}x-3$という関係があるとき，次の問いに答えよ。

①　xの変域を$\{x\ 1- \mid 0\leqq x\leqq 10\}$として，表を作り，グラフをかけ。

②　xが-6から-2まで変わると，yはいくつからいくつまで変わるか。

③　xが３から６まで３だけ変わると，yはいくつだけ変わるか。

④　xがある数より１だけ増すとyはいくつだけ増すか。

（問題２）　次のグラフは，変数xに対する変数yの変化の様子を示している。xの値を順に増していくとき，yがどのように変化するか。（グラフは省略）

㋑yも増加していくもの　㋺yが減少していくもの　㋩yが増加したり減少したりするもの

Ⅲ　研究の結果とその考察

この指導は，中学１年生１クラス３５名について行ない，次のような調査問題で，事前テスト，事後テストを行ない，この指導でどのくらい理解できるかを知りたいと考えた。なお，右端の( )中の数は，事前テスト，事後テストの正答数を示す。

（問題１）　次の変数x，yの間には，どんな関係があるか。式で表わせ。

①毎時４Kmで歩く人の，歩いた時間x時間と歩いた距離yKm　（25/35 → 33/35）

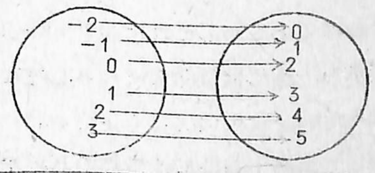
②面積が１２cm²である三角形の，底辺の長さ$x$cmと高さ$y$cm　（22/35 → 18/35）

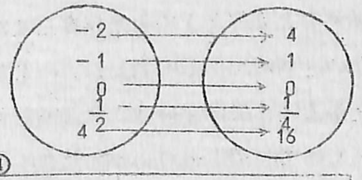
③ 600 ℓの水を毎分５ℓの割合で使うときの，使う時間x分と残った水の量$y\ell$（21/35 → 27/35）

文字の使用のところで，等式についての指導をしなかった為か，式に単位をつけて表わした者や，$4x=y$というように，yを後にかいた者が多かったが，事後テストではほとんどみられない。

②の問題で，図形の関係から$\frac{1}{2}xy=12$とした者が事前テストでは多かったが，事後テストではほとんどなかった。正答数が少ないのは，まだ表を作って考えることの不徹底によるものと思う。

（問題２）次の変数x，yの対応には，どんな対応の規則があるか，ことばでかけ。また式で書け。





式について

①（11/35 → 30/35）

②（ 4/35 → 32/35）

③（ 1/35 → 24/35）

④（ 0/35 → 26/35）

②

x	0	1	2	3	4	5
y	0	5	10	15	20	25

④

x	0	1	2	3	4	5
y	40	43	46	49	52	55

②の事前テストで，正比例と答えたもの１６人，yがxの５倍だと答えたものが６人である。xが1増すとyは５増すとか，xが２倍になるとyも２倍になるという変化の見方で考える生徒が多い。④など変化に着目して，対応の規則をみつけ出すわけであるが，対応の見方でも考えれるようにすることは，なかなか難かしい。③の問題なども変化の様子には気づくが２乗したものとは，授業中

でもなかなか気がつかなかった。しかし，上記の結果が示すごとく，かなりの理解を示している。

(問題 3)　変数xの変域と式が次のように示されたとき，表を作り，グラフをかけ。

①$y=1.5x$　ただし　$X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$　(5/35 → 32/35)

②$y=2x+3$　ただし　$X=\{x \mid 0 \leqq x \leqq 5\}$　(7/35 → 29/35)

①の事前テストでは，表のできた者が２６名であるが，そのうち２０名が線で結んでいる。グラフとは線で結んだものという意識が非常に強い。上の結果が示すように，xとyの対応する数の組が１つの点を決定する。その点の集合を関数のグラフという指導は効果があったと思う。

②では，yはxを２倍して３を加えたものということがわかったことから急にできるようになったと思う。ただ，事前テストで表を作らせた際，xの０に対するyの値が０である生徒が１３名いた。これは正比例の場合との混同によると思うが，０の指導もしっかりする必要を感じた。

(問題 4)　次の式で表わされた関数について，下の問いに答えよ。

㋑ $y=2x^2$　㋺ $y=-\frac{1}{3}x+2$　㋩ $y=0.5x$　㋥ $xy=12$　㋭ $y=5x+2$

①xが増加すると，それに伴ってyが常に減少するのはどれか。　㋥ (18/35 → 20/35)

②xが増加すると，yが減少したり増加したりするのはどれか。　㋑ (7/35 → 25/35)

③xが１ずつ増すと，yが$\frac{1}{2}$ずつ増すのはどれか。　㋩ (12/35 → 24/35)

④xの値が６のとき，yの値が３になるのはどれか。　㋺ (21/35 → 22/35)　㋩ (14/35 → 24/35)

⑤㋺の問題で，xが０から６まで変わるとyはいくつからいくつまで変わるか。(3/35 → 26/35)

関数の値の変化の指導は，どの程度に行なえばよいのか考え，前記のような指導をしてみたわけであるが，事後テストの結果は以外によくできたと思う。式から表やグラフを書いて考えていた生徒が多数いたことの理由によると思う。

Ⅳ　終わりに

我々は，変化と対応の関連を上述のように考え指導してきたわけであるが，これで全然問題がないとはもちろん思っていない。特に，関数の表わし方のところから，急に数量関係にのみしぼって考えるのは，どうであろうかという疑問を持つ。今後検討してみたい。

また，この指導を行なってみて，変化と対応とは明確に区別して指導することは当然のことながら無理ということがわかった。しかし，指導の過程としてどちらかにウェイトをおき，最後に一体化して考えられるようにするという，我々の考えた方法でよいのではないかと思っている。

授業をとおして，変域に対する関心が高まり，また対応の規則を求める問題等に対して，今までになく活気にあふれていたのも収穫の一つであった。